哲学概論 14, 7－12, 2012

確率と無限：常識を疑えば、何が見えるか

謎に満ちた世界はそこに棲む人が好奇心をもつことによって現れてくる。好奇心をもって世界を眺めることによって、世界が謎に満ちた、興味深い対象に変貌する。何の関心も興味ももたない人には、世界は単なる惰性的な塊で、神秘的で心躍るような対象ではない。謎に満ちた世界は好奇心旺盛な心にしか出現しないのである。

確率は確からしさを表す物差し（尺度、測度）として使われている。確率を使って考えられてきた典型的な出来事には、

コイン投げやサイコロ振り、
明日の降水確率、
賭けや博打[1]

等がある。誰もがそれらを確率的だと信じて疑わない。確率はコイン投げや天気予報で当たり前に使われているので、そこに何の疑問もないように見える。だが、そこには実に多くの謎が秘められている。ここでは謎の宝庫の中から二つだけ取り上げ、次のような問いの形で考えてみよう。

（1）　コイン投げ（やサイコロ振り）は確率的な出来事か？
（2）　確率が 0 であるとは、起こることが不可能な出来事の確率か？

確率はどのような仕組みを使って表現され、計算されているのか。コイン投げは「裏」と「表」という、二つの異なる結果だけをもっている。誰が、いつ、どこで、どんな風に投げるかは一切問わず、公平なコインが公平に投げられるという理想的で、一般的な場合が前提されて、コイン投げのモデルがつくられる。そのモデルは、どんな出来事の集まりか述べ、一つひとつの出来事がどの程度起こるかを 0 から 1 までの実数を使って表現する。1 回コインを投げた場合、その結果は、

表、裏

の二つだけである。これらは出来事、事象（event）などと呼ばれている。公平なコイン投げなら、表と裏の結果の出方に違いを見つけることができないため、普通は表と裏に等しい確率を与える。しかも二つの場合しかないので、「表が出るか、裏が出るかのいずれかである」という（いつでも正しい）出来事の確率は 1 でなければならず、それぞれ 0.5 という等しい値を与えることになる。では、二回続けて投げるとどうなるのか。その結果は、出る順序も区別するのであれば、

表表、表裏、裏表、裏裏

の 4 種類になり、そのうちの一つの結果だけが実際に起こる。前と同じように 4 つの場合に差がなければ、それぞれの場合が生起する確率は 1/4 になる。

では、コインが公平でない場合はどうか。例えば、裏が出やすく、表が出にくい場合、次のように確率の値を割り振ることができる。

表：1/4、裏：3/4

こんな確率でコイン投げを計算したことなどないかもしれないが、計算はできるし、これが正しいようなコインをつくることもできる。不公平なコインは珍しくないが、全く公平なコインはあるのだろうか。「公平なコイ

[1] パスカルやフェルマーという名前を Web で検索してみよう。二人は賭けに関する議論から確率について面白い考察をしている。

ン」は「三角形」と同じようにこの物理世界には存在しない。そのため、公平なコインを所持する人などいない。[2]

（問）本文中の不公平なコインを二回投げた場合に生じる各結果の確率を計算しなさい。また、公平なコインを 3 回続けて投げると、どんな結果が予想できますか。

今まで述べてきたことは目新しいことではなく、既に学校で習い、世間でも常識として認められている考えである。そこで、この考えが本当に疑いのない正しい常識なのかどうかを調べ直してみよう。まず、普通にコインを投げることとピサの斜塔の上からコインを投げるのは同じようなことである。ガリレオがアリストテレスの運動の法則[3]を誤りだと経験的に示し、正しい落体の法則を確立したのと同じように考えれば、コイン投げは落体の法則に従う力学的な出来事、つまり、物理的な運動である。それゆえ、コインが地面に落ちて表か裏になるのは、実際に投げる前に運動の法則を使って計算できるはずである。実際の計算は空気の抵抗や最初に加える手の力等を考慮しなければならず、大変難しいものである。だが、原理上は確率的にではなく、（運動方程式を解く）計算によって確定的に求めることができる。コイン投げはピッチャーがボールを投げるのと同じように力学的な出来事である。したがって、コイン投げは古典的な力学が適用される典型例で、確率を使う理由などどこにもないことになる。にもかかわらず、なぜ確率を使ってコイン投げを扱うのだろうか。

様々な条件をすべてしっかり考慮して力学的なモデルをつくることが難しいというのが第一の理由である。それに確率的なモデルは比較的うまく結果を予測してくれる。将来起こる出来事は原理上計算できるとしても、実際は情報不足で正確なモデルがつくれず、それゆえ、計算できない場合がほとんどである。実用の上からも確率的なモデルが重宝される。そのため、予測や説明のための便宜的な道具が確率ということになる。

たとえ原理上であっても古典的な力学の世界ではすべての出来事は確定的である。知らない過去の出来事も起こっていない未来の出来事も起こるか起こらないか（起こったか起こらなかったか）のいずれかで、ある時点の状態がわかっていればそれらを計算することさえ可能である。したがって、確率的な出来事などそもそもこの世にないことになる。すると、そこに確率を使って確定的でない出来事を考えることは、力学の基本的な前提に矛盾することになる。古典力学の世界ではどんな出来事も確定的で、曖昧でぼんやりした出来事や、何%の確率で起こる出来事といったものは存在しない。では、私たちの周りで使われている確率をどのように考えたらいいのか。これが確率の解釈問題と言われてきたものである。

確率について色々な解釈が今まで考案されてきたが、ここでは代表的な二つの解釈だけ説明することにしよう。それらは次のような解釈である。

(1) 確率の頻度解釈（客観的解釈）
コイン投げは何度もコインを投げて、その結果の総計から表、裏が公平な場合にはほぼ 50%になるということを確率を使って説明できる。1 回のみのコイン投げではなく、多数回コインを投げたときの頻度、割合が確率の値である。それゆえ、確率の値はグループや多数の繰り返しが持つ（1 個や 1 回ではわからない）性質を表現している。

(2) 確率の認識解釈（主観的解釈）
コイン投げは古典力学で扱うことができる出来事で、古典力学は運動の法則を使って出来事が確定的に起こることを主張しているので、確率的な出来事はこの物理世界にはどこにもあり得ないことになる。この世界での出来事はすべて確定的で、確率的ではない。確率を使ってコイン投げを考えるときの確率は、したがって、この世界の出来事についての確率ではなく、私たちがコイン投げの結果を心の中でどの程度信頼しているかを表現する確率である。心の世界は物理的な世界ではないので、心の世界で確率を使ってもなんら問題は生じない。

[2] 公平なコインはどのようなコインか考えてみよう。そんなコインは実際にはつくれないが、公平なコインを投げた結果は「裏でも表でもない」ことになる。例えば、裏が出たら、裏が出るバイアスが事前にコインにあったことになり、コインは公平ではなかったことになる。
[3] アリストテレスは物体が落下する速さは物体の重さに比例すると主張したが、アリストテレスの権威を盲信してか、永い間誰もそれを疑わず、実験もしなかった。

確率とは、それゆえ、出来事についての情報がもっている信頼度である。[4]

それぞれの解釈が客観的、主観的と呼ばれる理由は上の説明から明らかだろう。同じ確率でも客観的な確率と主観的な確率では全く違うものだということも明瞭である。

（問）コイン投げをそれぞれの確率解釈で説明するとどうなりますか。何度もコインを投げるとき、特定のコイン投げの確率はいずれの解釈に合っていますか。

次は少し難しい問題に挑戦してみよう。それは「有限」と「無限」の違いが絡んだ謎である。砂浜の砂粒や砂糖の粒子はどんなに多くてもやはり有限である。[5]この世界に無限のサイズをもつ物質はない。それゆえ、無限の例はこの世界にはどこを探してもない。無限の例として（この世界には存在しない）自然数の集まりを考えてみよう。有限の場合と違って、いくら自然数を数えていっても終ることはない。限りなく数え続けなければならず、これは人間にはできないことである。実際にできなくても、人は自然数をすべて集めて、一つの集合をつくることを頭の中、心の中で簡単に実行できる。私たちの思考は物理的な事柄に縛られているのではなく、いつでもそれを超えることが容易にできる。それこそが考えたり、想像したりすることの堪らない魅力となっている。では、実数ならどうだろうか。実数は自然数をその一部に含んだ数であるから、当然実数の個数も無限個あることになる。では、自然数と実数は同じ個数の数を含んでいるのか、それとも異なる個数なのか、いずれなのだろうか。二つの集合が同じサイズであるとは、二つの集合の要素の間に 1 対 1 の対応関係があり、しかもその関係に漏れる要素が一つもないことである。つまり、一つの自然数と一つの実数で仲間外れが出ないように、きちんと対をつくることができることである。

（問）自然数の集合と偶数の集合は同じサイズでしょうか。また、100 までの自然数と偶数の場合はどうなりますか。

偶数は自然数の中の奇数でない数で、奇数と偶数は同じ個数あるにもかかわらず、自然数の集合と偶数の集合は同じサイズをもっている。こんな奇妙なことは有限の数の集合の場合は決して起こらない。100 未満の自然数の中には偶数は半分しかない。いずれにしろ、無限は有限と違って、常識的に判断すると誤ってしまう場合がほとんどだということに留意したい。無限は単にサイズの大きい有限ではない。例えば、無限の集合について、

全体は部分より大きい、

という主張は誤っている。というのも、自然数全体と偶数の集合は同じサイズをもっているからである。[6]

では、実数はどんなサイズの無限集合なのか。簡単なイメージは数直線です。0 から 1 までの数直線（線分）を考えてみよう。数直線上の個々の点が 0 から 1 までの実数に対応している。実数の集合のサイズを直観的に言えば、「連続している」という性質を満たすサイズである。有理数は連続していないが、無理数は連続している。整数は 0 と 1 しかないが、有理数や無理数は 0 から 1 の間に無限個ある。そこで、0 から 1 までの数直線上の任意の点を取ったとき、それが有理数である確率は何か、と質問してみよう。頻度でも信頼度でもいずれで確率を解釈しても、確率の計算の仕方は変わらないので、計算したらどうなるだろうか。有理数は無限個あるにも関わらず、計算結果は 0 である。つまり、眼を閉じて任意に有理数をピックアップする確率は 0 である。

この計算結果から、「確率 0 である理由は有理数が 0 から 1 の間にないからだ」と主張できるだろうか。そんな主張はできない。有理数は存在しないどころか、0 から 1 の区間に無限個存在するためである。それでも、無

[4] 「客観的」、「主観的」という区別が何に基づいているか考え、常識を確認してみよう。

[5] 砂浜の砂粒や砂糖の粒子が無限にあったら、どんな不都合が生じるのか。砂浜も砂糖も無限のサイズをもつことになってしまう。

[6] 自然数の集合＝偶数の集合＋奇数の集合であるにも関わらず、自然数の集合のサイズ＝偶数の集合のサイズ＝奇数の集合のサイズ、ということになる。

限個ある有理数のどれか一つをピックアップする確率は 0 である。[7]ここから得られる教訓は、

確率の値が 0 であることは、その出来事が起こり得ないことを意味していない、

ということである。ある出来事が絶対に起こらないなら確率は 0 だが、確率が 0 だからといって、その出来事が起こらない、とは言えないことになる。つまり、

ある出来事が起こることが不可能なら、その確率は 0 である、
ある出来事の確率が 0 でも、それが起こることは不可能ではない、

ということになる。有限の場合には、出来事の生起が不可能であることがその出来事の生起の確率が 0 であることと一致する。しかし、無限の場合にはそのような常識的な一致は破れてしまう。今までの議論をまとめてみよう。

区間 [0, 1] の有理数は無限にあるのに、そのどれか一つを抽出する確率は 0 である。でも、有理数はその区間のなかに無限にあるので、そのどれかを抽出することは不可能ではない。にもかかわらず、その確率は 0 である。

ここに登場した主な英語の単語を挙げておく。わからない単語は辞書でその意味を確認しておいてほしい。

Probability, statistics, heads and tails, event, model, measure, Aristotle, coin toss, fair coin, frequency interpretation, subjective interpretation, objective interpretation, set, class, infinity, finite-infinite, natural number, integer, rational number, irrational number, real number, continuum, information, laws of motion, and classical mechanics.

まとめ
　数学的な概念としての確率は尺度（測度、物差し）で、それを私たちの世界に適用することによって、出来事がどの程度で生じるかを測っている。その際、この世界にはどこにも存在しない無限概念が使われる。この無限概念は大変に厄介で、非常識な性質を数多くもっている。

（最後の問）
連続しているもの、例えば線分を二等分する仕方で順番に切っていっても、最後の点にまでは到達できないことを説明しなさい。

[7] 有理数を点とすると、有理数の点をどんなに集めても線をつくることはできない。したがって、有理数の点の集合は長さをもつ線にはなれず、「有理数の線」のサイズは 0 である。