

## 2 神の存在証明

トマス・アキナス (Thomas Aquinas, 1225-1274) はアリストテレス哲学を土台にキリスト教神学をつくりだした主要な一人である。彼は神の存在証明を 5 通り (「5 つの道」と呼ばれる) 示したが、その最初の証明である運動からの証明を見直してみよう。<sup>1</sup>

[証明]

前提 1 : 動くものがある。

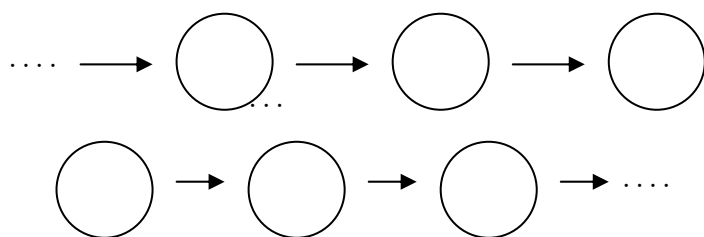
前提 2 : 動くものは他のものによって動かされる。

それゆえ、何かを動かすものがそれ自身動くなら、それは第 3 のものによって動かされなければならない。

それゆえ、動かすものの無限の系列があったなら、最初に動かすものはなく、動かすものは全くなくなるだろう。

それゆえ、動かすものの無限の系列はあり得ない。

結論 : 最初の自らは動かないで、動かすものがある。



アキナスの証明を図示すると、上のような図になるだろう。(いずれの系列が結論を示しているか。) この図は上の証明の一解釈であって、正確に図示してあるわけではない。というのも、証明の言明が正確に何を述べているか議論の余地があるからである。

この証明が正しいなら、結論に登場する最初の動者という性質をもつものがあることになり、運動の第一原因としての神の性質が証明されたことになる。一見すると反論するのは難しいように見える。動者の系列を辿っていくと最初のものに行き着き、それは最初のものであるために他の何ものからも動かされることがない。動かされるなら、最初のものではなくなるからである。「動かすものの無限の系列があったなら、最初に動かすものはなく、動かすものは全くなくなるだろう」という文がこれに対応している。この文が正しいなら、上の証明は前提を認める限り成立する。したがって、この文の真偽が証明の鍵を握っていることになる。

[神の存在証明と無限概念]

ここで、無限についての知識を活用してみよう。私たちは自然数や実数が無限個あることを知っている。そこで、まず自然数を考えて、各自然数が動者に対応しているとしてみよう。動くものを  $n$  にして、それを動かすものを  $n-1$ 、さらにそれを動かすものを  $n-2$  という風に、次第に遡及して行ってみよう。すると、最後に  $0$  に到達し、それ以上は遡及できない。この  $0$  が不動の動者に対応している。これが私たちに反論が難しいという印象を与えていた理由であろう。だが、ある自然数  $n$  から遡及するのではなく、 $n+1$  を動かすもの、そしてそれを動かすものを  $n+2$  という風に考えて行くとどうなるだろうか。すると、いつまで立っても最終の到達点はない。というのも、自然数は無限だからである。自然数の系列をこのように解釈するなら、これはアキナスの証明に対する反例となる。

さらに、適当な正の実数を考え、その実数から次第に  $0$  に近づく実数の系列を想像してみよう。 $0$  から  $1$  までの線分が格好の例となる。実数は  $0$  から  $1$  まで連続して並んでいる。線分内の個々の実数が動者であると仮定して、上の証明を当てはめてみよう。 $0$  から  $1$  までは無数の系列であるが、明らかに最初のも存在する。それは  $0$  である。これは「動かすものの無限の系列があったなら、最初に動かすものはなく、動かすものは全くなくなるだろう」という文に対する反例となっている。したがって、この文は正しくなく、この文を含む証明全体も正しくないということになる。閉区間  $[0, 1]$  には確かに  $0$  という出発点がある。これは出発点を保証して、かつ無限の動者の系列をつくれることを意味している。この点で、結果としてアキナスの証明を補強するのに使うことができる。一歩一

<sup>1</sup> アキナスの最後の証明はデザインからの証明である。

- (1) 目的に向かう対象の中で、あるものは心を持ち、別のものはもたない。
- (2) 目的に向かう対象は、それが心を持たないなら、心を持つものによって創造されたのでなければならない。
- (3) それゆえ、目的に向かう、心を持たない対象をすべてデザインした存在がなければならない。
- (4) したがって、神が存在する。

歩では到達できないが、出発点は存在する場合があるのである。だが、半開区間  $(0, 1]$  を考えたらどうなるか。0 はこの区間に含まれないので、この半開区間に出発点はない。 $a$  が出発点なら、 $a/2$  が存在して、それは  $a$  より小さくなってしまい、 $a$  は出発点ではなくなってしまう。無限の系列は存在し、動者を遡っていくことができるにもかかわらず、最初の動者、つまりは第一原因には到達できないのである。これも別の意味で「動かすものの無限の系列があったなら、最初に動かすものはなく、動かすものは全くなくなるだろう」という文の反例となっている。

このように現在の私たちは簡単に証明の誤りを指摘できるが、それが可能なのは「無限」概念とその知識を使っているからである。無限が承認できないのであれば、このように簡単に処理することはできない。無限の容認の是非が二つの時代（アキナスと私たち）を分けている。形而上学を通じてこの違いを垣間見てみよう。

[形而上学について]

形而上学は哲学の研究分野の一つで、実在や自然の本性を研究してきた。私たちは論理学の開祖としてアリストテレスに言及したが、そのアリストテレスの名を有名にしている今一つのものが形而上学である。形而上学は英語で **Metaphysics** である。物理学は **Physics** である。「メタ」という表現は最近よく登場するが、「～の後に、次に」という意味である。**Meta-physics** は、したがって、「物理学の後で研究するもの」という意味になる。実際、アリストテレスの形而上学は自然についての個々の知識を習得した後で、自然の基本的な本性について一般的に研究するものであった。このような語源的な説明で形而上学が何であるかわかるものではないが、その歴史は自然に関する哲学と深く結びついていた。この自然哲学の傾向はニュートン (Isaac Newton, 1642-1727) の物理学を通じて物理学の基礎的な概念の追求となって現在にまで続いている。また、アリストテレスの形而上学がカトリック神学に取り入れられ、自然神学を形成したため、神と自然や人間の関係についての一般的な考察にも多くの研究が費やされてきた。そのような研究の代表例が神の存在証明で、それは次のようだった。

世界の出来事が無限にないことを仮定した上で、どのような出来事にも原因があり、その原因にはまた別の原因があるという具合に、原因を遡及する系列を考えた場合、それは無限に遡及できないことから、それ自身では他のものによって引き起こされない第一原因がなければならないことになる。この第一原因は世界の中の出来事を引き起こすのであるから、世界の中になく、そのような第一原因を性質としてもつものがなければならない。それが神である。

(問) 神を信仰することは、神の存在証明とどのような関係にあるのだろうか。信仰をもつなら、信仰の対象である神は存在し、それを証明する必要はない、と考えれば、神への信仰とその神の存在はどのような関係になるのだろうか。信仰するゆえ、神は存在するのか、それとも、存在するゆえ、信仰をもつことができるのか。あるいは、それらのいずれでもないのか。

[無限の解明]

第一原因の存在を証明する推論は既に見たように正しくない。現在の私たちには無限概念は驚くべき概念でも恐れるべき概念でもない。したがって、最初の前提は多に疑いの余地がある。さらに、「第一原因である」という性質から、そのような性質をもつものが存在するという推論も受け入れがたい。確かに、中世は無限概念を嫌い、恐れたが、だからといって無限概念を消し去るわけにはいかない、既にパンドラの箱は開けられてしまったのだから。

ところで、「無限」とはどのようなものか。カントール (Georg Cantor, 1845-1918) によって明らかにされた無限概念は集合論という 20 世紀数学の基礎理論を生み出すことになった。「無限に分割する」、「限りなく大きい」といった表現に正確で、矛盾のない意味を与えることは、自然数や実数という数学的な対象を正しく把握することになり、それらを基礎とする数学を確立することになるとカントールは考えた。その結果、現在では公理的な集合論ができあがり、数学の基礎理論として使われている。能書きはこのくらいにして、「無限」に触れてみよう。自然数はいくつあるか。それはどのように証明できるのか。これらの問題はそれほど厄介ではない。自然数が有限で、したがって、その中に最大のものがあつたとしてみよう。それを  $n$  とすると、 $n$  に 1 を加えて自然数がつくられることから、 $n+1$  という自然数があることになる。すると、 $n$  は最大であつたにもかかわらず、 $n < n+1$  であり、これは矛盾である。それゆえ、最大の自然数があるという最初の仮定が誤りであり、最大の自然数は存在せず、自然数は有限ではないことになる。(当然ながら、自然数はその大きさに関して単調に並んでいて、循環しない。) つまり、自然数の個数は無限である。では、実数はどうか。自然数は実数の一部であり、その一部が無限なのであるから、当然実数の個数も無限であると考えることができる。では、同じサイズの無限なのか、それとも異なるサイズなのか。カントールは**対角線論法**と呼ばれる手法によって実数の無限のサイズが自然数のそれより大きいことを示したが、ここ

では直観的に次のことで理解してほしい。<sup>2</sup>自然数は小さい方から順に、0、1、2、...と並べていくことができる。しかし、実数をこのように並べることができるだろうか。0 から始めて、次に大きい実数は何か。私たちには実際にそれが何かを言うことができない。そのような数が存在することは証明できてもそれが何かは直接に指定できない。自然数の無限は番号をつけることができるが、実数は連続しており、可付番ではない。これで少なくとも2種類の無限があることがわかった。実際、無限の種類は無限にある。だが、自然数と実数の間に別の無限があるかどうかはわからない。

(問) 一番大きな無限があるかどうか考え、それが無いことを帰謬法で証明してみなさい。また、一番小さな無限が存在するかどうか説明しなさい。

(問) 「0 より大きい実数の中で最も小さい実数」と表現することによって、0 の次の実数を指示することができます。この表現内容通りに最も小さい実数を実際に見つけ、取り出すことが私たちにできるのでしょうか。0 の次に大きい実数が存在することを証明することと、その存在が証明された数を実際に取り出すことを証明することとがどのように異なることなのか説明しなさい。

私たちは神の存在証明から数学的な無限に話を転じたが、自然哲学と結びついた形而上学にはどのような問題があるのだろうか。それら問題は物理学の基礎に結びついたものが多いと述べたが、そのような代表的な項目を列挙すれば次のようなものがある。

実在、自然法則、時間、空間、因果性、時間の向き（過去、現在、未来）、決定論

これらのいくつかは後に議論することにするが、因果性や決定論を考える上で基本的な役割を演じる「ならば」という言い回しについて先に触れておこう。「ならば」の論理的な構造は既に Box 3 で述べた。その内容と合わせて以下のことを理解してほしい。原因と結果が因果作用を構成しているが、原因はその結果の十分条件である必要も、必要条件である必要もない。つまり、**原因、結果**と**前提、帰結**の関係は類似していても基本的に異なったものである。私たちは前提と帰結の論理関係についてはある程度知っているが、原因と結果の因果関係については思っているほどは知らない。そこで、「ならば」の二義性について考えてみよう。

[因果関係：原因と結果]

「Aならば、Bである」という表現は単純であるが、原因—結果と前提—帰結の二つの（根本的に異なる）関係を二重に意味している。それを次の例で実感してほしい。

- (1)  $a + b = c$  ならば、 $2c = a + b + c$  である。
- (2) 伊作が怒るならば、史門が泣く。

文(1)の「ならば」は Box 3 で述べた論理的な「ならば」であり、前提  $a + b = c$  と帰結  $2c = a + b + c$  の含意関係を主張している。実際、 $a$ 、 $b$ 、 $c$  が自然数や実数であれば(1)は正しい文であり、含意関係が成立している。それに対して、文(2)の「ならば」は因果的な「ならば」で、伊作の怒るという心理状態と史門の泣くという行為の間に因果的な関係があることを主張している。二つの「ならば」の違いは極めて重要である。例えば、(1)の前提と帰結はそれらがいつ成立するかは考慮されないが、(2)の二つの状態は時間的な制約を受けている。伊作が先に怒り、その後で史門が泣くのでなければ、因果関係は成立していない。日常的な表現である「ならば」が論理的、因果的の二つの意味を併せもつことは日本語だけの偶然的な特徴ではない。英語でも「if then」は同じように二義的に使われている。

(問) 「ならば」の因果的な意味と論理的な意味の違いを具体的に述べなさい。

このような「ならば」の二つの意味は物理学と物理的な世界を考えてみると鮮明になる。例えば、力学の言明は数学を使って表現されている。運動方程式は論理的な「ならば」を使って数学的に変形され、解が見つけれられる。一方、そのような運動方程式によって記述される物理世界の変化は因果的な変化であり、その変化は因果的な「なら

<sup>2</sup> カントールの対角線論法についての説明は3章において述べられているので、参照してほしい。

ば」で表現される。数学が物理世界を表すのに役立つ理由の一つは、私たちがこれら二つの「ならば」を巧みに利用し、相互の関係をつけているからである。だが、概念上、二つの「ならば」は全く異なったものである。

(問) 次の文章を読んで、因果的な「ならば」と論理的な「ならば」を見つけ出し、それらの使い分けを説明しなさい。また、述べられている内容がカオス (chaos) に関わることから、線型性、非線型性、カオスを検索してそれぞれの内容を確かめなさい。

「仮説とそこからの推論の例としてハエの人口動態について考えてみよう。仮説の効果的な適用と検証はモデルをつくり、具体的に記述、説明、予測することによって行われる。実際の観察から、ハエの個体数は前の年の個体数によって決まることがわかったとしてみよう。この事実は  $N_{t+1} = F(N_t)$  と表現できる。 $t$  年の個体数  $N_t$  が  $t+1$  年の個体数  $N_{t+1}$  を決める関係  $F$  が、 $t$  年の個体数に関して  $t+1$  年に  $R$  倍になるとすると、 $N_{t+1} = RN_t$  となる。これは**線型** (形) の方程式で、 $R$  の値によって異なる変化を描く。だが、実際はハエの個体数が増えると次第に食物が減り、捕食される率も高くなり、単純な比例関係にはないだろう。そこで上の仮説の修正のため、 $(R - bN_t)$  という関数を選んでみよう。係数  $b$  は集団が大きくなるにつれ成長率が減少する割合を示している。前の式を書き換えると、 $N_{t+1} = (R - bN_t)N_t$  となる。この式は**非線型**で、不思議なことに  $R = 3.570$  のとき、それまでの安定した周期的なサイクルから**カオス**的な振舞いに変わる。この式は  $N_t$  の値が一つ定まると、 $N_{t+1}$  の値も一つだけ定まるという意味で決定論的な式であるが、 $N_0$  の値が僅かでも異なると、数世代後の個体数はすっかり異なってしまい、長期にわたっての正確な予測ができないことを示している。これが**初期状態への鋭敏性**といわれる特徴である。」

### 3 ゼノンのパラドクスと解析学の応用

ゼノン (Zenon, 490 BC 頃-425 BC 頃) はギリシャの哲学者で、帰謬法を使った推論で有名である。彼の推論の目的は師であるパルメニデス (Parmenides, 510BC 頃生) の主張を擁護することであった。パルメニデスは実在を一つで、不変不動のものと考え、それゆえ、運動、変化、複数性はすべて錯覚に過ぎないと主張した。この主張は多くの批判を浴びたが、ゼノンは師の主張を擁護するために、運動や変化が存在するとすれば、矛盾に陥るという帰謬法を使った推論を展開した。ゼノンの論証は 4 種類伝えられている。ここではそのうちのアキレスとカメの競走を考えてみよう。

[アキレスとカメの競走]

アキレスとカメは 100m 競走をする。アキレスは 1 秒に 10m 走り、カメは 1 秒に 1m 走る。これでは明らかにアキレスが勝つので、ハンディキャップレースにする。カメはスタートラインから 10m 先のところから 90m 走ることにする。二人は同時にスタートするが、スタートでは 10m の差がある。1 秒経つと、アキレスはスタートラインから 10m のところまで達する。カメは 1m 進むので、スタートラインからは 11m のところまで達する。したがって、1 秒後の二人の差は 1m である。次に 0.1 秒後を考えよう。アキレスは 1m 進むので、1.1 秒後の進んだ距離は 11m となる。一方のカメは 0.1m 進むので、その進んだ距離は 11.1m となる。まだ、カメのほうがアキレスより先にいる。次に考えるのは 0.01 秒後である。同じような計算から、アキレスは 11.1m、カメは 11.11m となる。まだ、カメの方が先にいる。次は 0.001 秒後である。このように前の 1/10 の時間間隔でアキレスとカメの進んだ距離を計算していく。さて、こうしてできあがるアキレスとカメの距離の系列において、いつアキレスはカメを追い抜くことができるのか。この問題に対して、常識はアキレスがカメを簡単に追い越すことを示しているが、系列はいつまで経ってもアキレスの進んだ距離はカメの進んだ距離を超えることができない。したがって、これはパラドクスである。

ゼノンのパラドクスを構成的 (constructive) に考える場合と非構成的に考える場合とに分けてみよう。非構成的な解決の仕方は反事実的な状況を仮に設定してみることで、あるいは帰謬法を用いてその問題を扱うことである。アキレスが既に  $a$  秒走ったとすればどうなるかを尋ねてみることである。あるいは、アキレスが  $a$  秒後にまだカメを追い越していなかったと仮定して議論を進めてみることである。このような対処の仕方は簡単にアキレスがカメを追い越していることを証明する。例えば、4 秒後にアキレスがまだカメを追い越していないと仮定してみよう。アキレスは既に 40m 走っている。一方、カメは 14m に過ぎない。したがって、この仮定は矛盾している。それゆえ、4 秒後にはアキレスは既にカメを追い越していなければならない。

[数列の収束]

一方、構成的な考え方はスタートから実際に変化する状態に合わせて一步一步議論を進める方法である。この方法は反事実的な仮定や帰謬法を用いず、アキレスとカメの走りを再現していくという意味で数学の構成主義的な議論の進め方と同じである。このような議論の進め方のすべてについてアキレスがカメを追い越せないというのでは

ない。実際、二人の走りの追跡方法を少し緩和し、1秒毎にアキレスとカメの走りをモニターしたとしてみよう。2秒後にはアキレスはカメを追い越してしまっている。問題はどのような仕方で二人の走りを追跡しても同じように追い越しの確認ができるかどうかである。上述のように時間間隔を1/10にしていく仕方ではそれが確認できないところに問題が生じる。なぜ確認できないかは無限個の位置や時間間隔の存在に由来している。無限の級数の和をゼノンが計算できなかったし、それが計算できるのは19世紀のコーシー（Augustin L. Cauchy, 1789-1857）まで待たなければならなかった。コーシーの考えに基づいてアキレスとカメのパラドクスを考えてみよう。

まず、無限の数列  $\{S_n\}$  が  $L$  に収束する、あるいは極限  $L$  をもつとは、任意の  $\varepsilon > 0$  について、ある正の整数  $N$  が存在して、どのような  $n > N$  についても、 $|S_n - L| < \varepsilon$  となることである。例えば、

$$1/10, 1/10^2, 1/10^3, 1/10^4, \dots$$

という数列の極限は0である。数列の極限という概念が定義されると、それを無限級数の和を定義するのに使うことができる。無限の級数  $s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n + \dots$  の和を定義するために、次のような部分和を考える。

$$S_1 = s_1$$

$$S_2 = s_1 + s_2$$

.....

$$S_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

各  $S_i$  は有限で通常の加算ができるので、問題はない。<sup>3</sup>既に無限の数列の極限を定義してあるので、数列  $\{S_i\}$  についてそれが極限をもつなら、上の級数は収束することになる。この結果を容易にアキレスとカメの場合に適用し、収束の時点でアキレスがカメに追いつけることが示される。

このように書くと、わかったような気持ちになるが、本当にわかったと納得したかどうか今一度考えてほしい。数列、級数、無限、極限、収束といった単語が使われて何が正確に主張されているのか、丁寧に見直してみよう。その前に次の問いを通じて、アキレスがカメに追いつくことを直観的に理解しておこう。

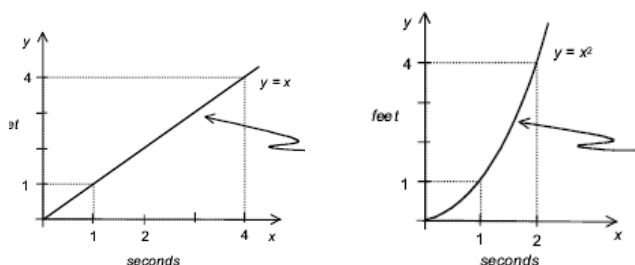
(問) アキレスがカメに追いつくことを実際に示してみなさい。また、アキレスがカメを追い抜くことは同じように示すことができるでしょうか。

### Box 無限小 (Infinitesimal) と極限 (Limit)

曲線の性質は幾何学の問題であるが、物理学ではそれらは連続的に変化する性質（例えば、一様な加速度のもとでの距離や速度の変化）に対応している。このことを簡単な等速運動を例に振り返ってみよう。

#### 1 無限小概念

等速運動とは単位時間当たりの距離の変化率が一定の運動だった。これを幾何学的に表現するにはどうしたらよいか思い出してみよう。 $y = x$ （つまり、直線で、下の左図の矢印）は等速運動する物体の時間と距離の関係を表している。（一定の速度は一定の傾きをもつ。）

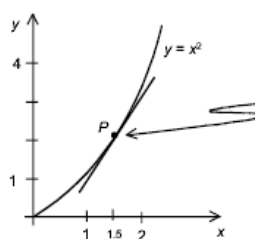


(y 軸は距離、x 軸は秒と書く)

次に加速度運動を考えてみよう。この運動は単位時間当たりの距離の変化の比率も変化する運動だった。つまり、速度は一定ではない。（一定でない速度は傾きが一定ではないことになる。）

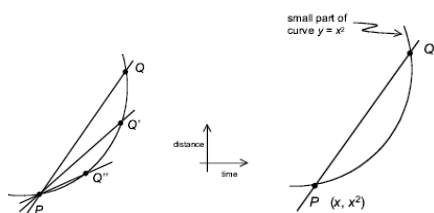
<sup>3</sup> 各  $S_i$  が有限でないと、無限の和となり、それは和の定義上ありえない。それで、まず有限の和の数列を考え、その数列の極限をとると、それが無限の和にあたることになる、という工夫が行われた。この工夫が極限操作で、コーシーによる。それまでは、ニュートン、ライプニッツ、そしてオイラーも無限小概念を使って解析的な計算をしていた。

(問) 加速度運動について、ある瞬間（例えば、矢印の $x=1.5$ 秒）の物体の速度は何か。



上のグラフでは点 $P$ での接線の傾きが速度を表し、それは一般的に求めることができる。

主張：点 $P$ での接線は $P$ に無限に近い点 $Q$ と $P$ を通る直線である。（その意図は $Q$ が $P$ に近づく、 $Q$ と $P$ を結ぶ直線が $P$ の接線に近づくということにある。）



（座標軸は $x$ 軸が時間、 $y$ 軸が距離、 $y = x^2$  の一部分）

ところで、次のような仕方でも $P$ の接線の傾きを計算できるだろうか。 $Q$ が無限に $P$ に近く、共に $y = x^2$ 上にあると仮定してみよう。

$\delta$ を無限に小さい量（infinitesimal）としよう。線分 $PQ$ の傾きは次のようになる。

$$\frac{(x + \delta)^2 - x^2}{(x + \delta) - x} = \frac{(x^2 + 2x\delta + \delta^2 - x^2)}{\delta} = 2x + \delta$$

$\delta$ は無限小なので、線分 $PQ = 2x$ となる。だから、1.5秒の物体の「瞬間的な」速度は3m/sとなる。

この推論は正しいだろうか。 $\delta$ とは正確に何なのか。0と同じように無視できるが、0ではない。（ある数を0で割ることはできない。できたとしても、任意の数 $n, m$ について $n \times 0 = m \times 0$ となるので、任意の数 $n, m$ について $n = m$ になってしまう。） $\delta$ は「無限小」と呼ばれてきた。

無限小に関する過去の哲学者、数学者の言明を列挙しておこう。表現は多彩でも、明晰でないものが感じられるだろう。

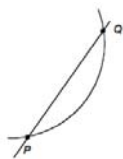
- Leibniz : 有用な虚構
- Newton : 量が消失する究極の比は確かに無限小の量の比ではない。限りなく消失する量の比が常に近づいていく極限である。無限小は実無限ではなく、可能無限である。
- Berkeley : 微積分は矛盾している。<sup>4</sup>
- Cauchy (1789-1857)、 Weierstrauss (1815-1897) : 彼らは無限小を使わないで、極限の概念に基づき厳格な基礎を与える。極限とは潜在的な無限、可能無限であり、実無限ではない。

(問) 上のライプニッツからコーシーまでの表現の中に登場する「実無限」、「可能無限」について考え、二つの違いを調べてみよう。特に、「無限小」、「極限」とはどのような無限概念に基づいているか確認しなさい。

## 2極限概念

<sup>4</sup> パークレーは次の長いタイトルの本でニュートンを批判した。 *The Analyst; or, A Discourse addressed to an Infidel mathematician. Wherein it is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith.*

無限小の代わりに極限が考えられたことから、極限概念をはっきりさせよう。まず、例として  $y = x^2$  の接線の傾きを考えよう。



$$PQ \text{ の傾き} = \frac{2x\delta + \delta^2}{\delta}$$

主張：Pでの接線はQがPに近づく場合のすべての直線PQの極限である。これは次のことを意味している。

- (1)  $\delta$  が小さければ小さいほど、接線の傾きに近くなる。
- (2) 接線の傾きにいくらでも近づけることができる。

つまり、どのように小さな数  $\varepsilon$  についても、 $\frac{2x\delta + \delta^2}{\delta}$  は接線の傾き  $\varepsilon$  の中にあるような有限の数  $\delta$  を見つけることが出来る。

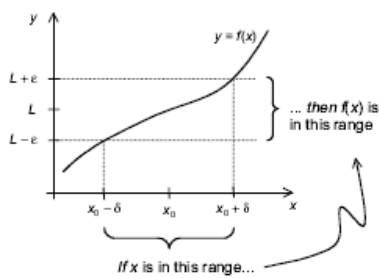
上の表現での二つの要点

- (1)  $\delta$  は決して0ではない。それはいつも有限の数である。
- (2)  $\delta$  は限りなく無限に小さいのではない。それはいつも有限の数である。

### コーシーによる極限の“ $\varepsilon$ - $\delta$ ”定義

$f(x)$  が  $b$  の近傍で定義されているとする。すると、

任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、 $\delta > 0$  が存在し、 $0 < |x - x_0| < \delta$  ならば、 $|f(x) - L| < \varepsilon$  であるなら、 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$



( $x$ がこの領域にあると... $f(x)$ はこの領域にある)

$\varepsilon$  がどのように小さくとも、 $f(x)$  と  $L$  の差を  $\varepsilon$  よりさらに小さくできるように  $\delta$  を選ぶことができる。

### 3極限と無限和

極限概念を使うことによって無限和を正確に定義することができる。和は「有限」の項に対してだけ定義できた。それゆえ、下のような無限の項の和はそれだけでは意味をもっていない。

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k$$

だが、有限の部分  $S_n = \sum_{k=1}^n 1/2^k$  は計算することができる。

$$S_1 = 1/2$$

$$S_2 = 1/2 + 1/4 = 3/4$$

$$S_3 = (1/2 + 1/4) + 1/8 = 7/8$$

$$S_4 = ((1/2 + 1/4) + 1/8) + 1/16 = 15/16$$

(これら部分和はすべて有限である。)

さて、これら部分和すべての数列をつくろう。

$$\{1/2, 3/4, 7/8, 15/16, \dots, S_n, \dots\} = \{S_n\} = f(n)$$

この数列の各メンバーは  $f(n) = \frac{2^n - 1}{2^n}$  で決められる。

さて、無限和  $S_\infty$  を段階的に部分和の数列  $\{S_n\}$  によって定義しよう。

#### (1) (数列の極限の定義)

関数  $f(n)$  でつくられる数列  $\{S_n\}$  は次の場合に極限  $L$  をもつ。

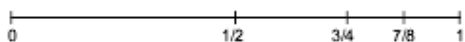
どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、ある  $N > 0$  が存在し、 $n \geq N$  ならば、 $|f(n) - L| < \varepsilon$  である。

これを  $\lim \{S_n\} = L$  と書く。

#### (2) (無限和の定義)

無限和  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = S_\infty$  はもし存在すれば部分和の極限  $S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \{S_n\}$  である。

#### 4ゼノンのパラドクスへの応用



主張：アキレスは決してゴールできない。

仮定：(a) コースは無限に分割可能である。それゆえ、コースの長さは有限部分の無限和である。

(b) 有限部分の無限和は無限である。

解析学は (b) を否定する。(部分和の数列が有限の極限をもつかどうかに応じて) ある無限和は有限である。この場合、

$$S_\infty = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k$$

である。部分和  $\{S_n\}$  の数列は

$$f(n) = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

によって与えられる。だから  $S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/2^n) = 1$  である。

(問) 本文で説明されたゼノンのパラドクスと比較しながら、上の解法を参考にアキレスがカメに追いつくことを証明してみなさい。また、次の二つの級数の極限が同じ値になることを説明しなさい。

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 1, 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \dots = 1$$