（2）観念、結合、そして思考の数学

［アリストテレス以後の展開］

17 世紀から「思考する」、「推論する」ことについての新しい試みが幾つも登場する。17 世紀からの新しい関心は次のように表現できる。数学、科学、そして哲学は知識の探求の異なる側面であり、

1 演繹的な推論に関する理論は心理学の理論であり、物理学が運動法則を研究するように、論理学は思考の法則を研究する。

2 思考の法則は、算術や運動の法則と同じように、代数的な形式をもっている。

（1 は誤りで、2 は正しいことが後に明らかになる。）

思考の法則は幾つかのすぐにわかる特徴をもっている。その一つは、単純な概念からの組合せであるという特徴である。人間＝理性的＋動物という定義に見られるように、組合せ (combination) は数学的な主題である。ルル (Ramon Llull, 1235-1316) は、推論は三段論法によってなされるのではなく、分解と結合の機械的な組み合わせであると考えた。また、ホッブス (Thomas Hobbes, 1588-1679) は推論を心理的な過程と考え、それゆえ、推論の理論を心的操作の理論として捉えた。

（問）心理的な規則と論理的な規則の違いは何でしょうか。さらに、言語の規則と心理の規則は何が異なるのでしょうか。

［ライプニッツの論理に対する考え］

ライプニッツ（Gottfried W. Leibniz, 1646-1716）は哲学、数学、論理学の分野で現在でも大きな影響を残している。彼が先鞭をつけたものの幾つかは数世紀後にやっと具体化され、その重要さが認識されるという具合である。最も有名な仕事として微積分学が挙げられるが、それは氷山の一角に過ぎない。その広範な研究は、真理、必然的真理、偶然的真理、可能世界、充足理由の原理（理由なしに何ものも起こらない）、予定調和の原理（心的出来事とそれに対応する物理的出来事が同時に起こるように神はこの世界を造った）、無矛盾の原理（矛盾が引き出せるような命題は偽である）等を含んでいる。ライプニッツは推論の原理は形式的な記号システム、つまり、思考の代数に還元できるという考えを生涯もち続け研究した。

彼の研究には次のようなものがある。推論が真か偽かを決定する計算の手続きを考え、論理の決定手続きという概念を生み出した。そして、彼は三段論法に関してそのような手続きを与えようとした。公理的な理論は、ある文について、それとその否定形のいずれもが公理から証明できない場合、不完全であると言われ、20 世紀にはそれが詳しく研究された。この不完全性という概念はライプニッツが初めて明確にしたものである。また、言語の一部は数を含む抽象的な記号によって符号化でき、論理的関係は記号間の関係として表現できることも示した。これは人工言語の発想である。また、命題間の論理的関係は代数的な構造をもつと考えた。これらのいずれも現在具体化されており、彼がいかに射程範囲の広い発想をもって研究していたかがわかる。

［ブールの論理代数］

次にブールの論理学の研究を見てみよう。ブールは論理学が物理学や幾何学の法則と同じような法則からなり、それら法則は代数的な形式をもっており、私たちの心の正しい働きを表していると考えた。彼はそう考えただけではなく、法則の特徴づけを後にブール代数と呼ばれるシステムによって具体化した。それは次のようなものからなっている。

ブール代数の法則

$x + y = y + x$　$xy = yx$　$x (y + z) = (xy) + (xz)$　$x + (yz) = (x + y) (x + z)$　$x + 0 = x$　$x1 = x$

$x(1 - x) = 0$　$x + (1 - x) = 1$　$x + (y + z) = (x + y) + z$　$x(yz) = (xy)z$　$0 \neq 1$

そして、この抽象的な法則は集合間の法則として次のように解釈できる。空でない領域 U 上での集合 F について、

$U \in F$

$A \in F$ なら、$U - A \in F$

$A \in F$ かつ $B \in F$ なら、$A \cup B \in F$ かつ $A \cap B \in F$

を満たす場合、任意の $x, y \in F$ について、$x + y = x \cup y$、$xy = x \cap y$、$1 - x = U - x$、$1 = U$、$0 = \varphi$ とすれば、ブール代数の法則は集合の間の関係によって真になる。つまり、上の条件を満たす集合の集まりはブール代数になっている。このようなブール代数の中で 1 と 0 の二つの要素からブール代数を考えると、それは命題の真、偽に関する振舞いを表す代数となる。

ブールは計算の自動化に最初から興味をもったわけではなく、命題の論理的な正しさを表現し、評価するための方法に関心をもっていた。複雑な命題の真偽をその複雑さがどのように生み出されるかの過程から示そうと代数的な計算を考えついた。それが次の結果である。要素的な命題から接続詞を使ってつくりだされる複合命題の真偽は要素的な命題の真理がわかれば、ブール代数の計算によって導き出すことができる。これは現在命題の真理表 (truth table)として知られている。それは次のような表である。

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$

1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

（$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\to$、$\leftrightarrow$ はそれぞれ否定、連言、選言、条件法、双条件法と呼ばれ、「—でない」、「－かつ…」、「－あるいは…」、「－ならば、…」、「－ならば、そしてそのときに限り、…」という接続表現に対応している。）

［真理表を使った真偽判定］

これらの表は p や q という命題から接続詞を使って複雑な命題をつくる際、p や q の真理値がわかっていれば複雑な命題の真理値も表にあるような規則から計算できることを表している。自然言語には多くの接続詞があるが、それらの論理的役割をまとめると上のような 5 つのもの（結合子と呼ばれる）で十分なのである。例えば、$((p \to (q \vee r)) \wedge ((q \to \neg r)) \to (p \to \neg(q \wedge r))$ を考えてみよう。この式はどのようにしてつくられているだろうか。p、q、r をもとに、まず、$\neg r$、$q \vee r$、$q \wedge r$ が結合子を一つ用いたものとしてつくられる。次は結合子を二つ用いたもので、$q \to \neg r$、$\neg(q \wedge r)$、$p \to (q \vee r)$ がある。三つ結合子を用いると、$p \to \neg(q \wedge r)$ができる。5 つ用いたものは、$(p \to (q \vee r)) \wedge ((q \to \neg r)$である。最後が与えられた式である。この式の構成の仕方にしたがって真理表を構成して行くことができる。

p	q	r	$\neg r$	$q \vee r$	$q \wedge r$	$p \to \neg r$	$\neg(q \wedge r)$	$p \to (q \vee r)$	$p \to \neg(q \wedge r)$	$(p \to\ (\vee r)) \wedge ((q \to \neg r)$	全体
1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1

0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1

この結果はどのような p、q、r の値に対しても全体の式はいつでも真であることを示している。このような式はトートロジーと呼ばれてきた。トートロジー $((p\rightarrow(q\vee r))\wedge((q\rightarrow\neg r))\rightarrow(p\rightarrow\neg(q\wedge r))$ は「人間は男か女かだが、男は女ではないので、人間は男かつ女ということはない」といった当たり前の文に対応しており、経験的な内容はもっていない。

(問) $(p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$ がトートロジーになるかどうか真理表をつくって確かめなさい。（この論理式は「対偶」と呼ばれています。）

(問)トートロジーは経験的には自明で、それゆえ無意味とみなされますが、推論には不可欠です。その理由を述べなさい。

（4）フレーゲの新しい論理的世界

［アリストテレスからフレーゲへ］

アリストテレスの命題の基本型は自然言語の文の形に基づいていた。彼は二つの名辞が文を構成すると考えたが、文は主語と述語からなると考えたのがフレーゲである。文法上、一つの文に主語は一つしかない。その一つの主語に述語がついている。主語を x、述語を F とし、「x は F である」を $F(x)$ と表してみよう。すると、アリストテレスの 4 つの基本型は、

すべての x について、$F(x)$
すべての x について、$\neg F(x)$　（¬はブールの説明の際に使った否定記号）
ある x について、$F(x)$
ある x について、$\neg F(x)$

となる。ここで、「3 は 4 より小さい」という命題について同じことを考えてみよう。3 や 4 を変数 x、y を使って書き直すと、「x は y より小さい」となり、さらに、大小関係の記号 $<$ を使うと、$x<y$ という式になる。これを $F(x)$ と同じ書き方にすると、$<(x, y)$ という表現ができる。この表現を $F(x)$ と比較するなら、$<(x, y)$ は二つの主語をもっていると言える。一つの文が二つの主語をもつことは文法的には許されない。しかし、文法の形式は文の形式であり、文の内容の形式ではない。「3 は 4 より小さい」の内容を考えてみると、「3 は自然数である」という文の内容が 3 の性質を述べているのに対して、3 と 4 の関係を述べている。いずれの文も文法上の主語は同じであるが、性質と関係という異なる内容をもっている。では、この異なる内容が正しく反映されるようにするにはどうすればよいのか。文法上の主語ではなく、論理上の主語をもとに内容を表現すればよいだろう。3 も 4 も論理上は同等であるから、いずれも論理上の主語として認めるなら、$<(x, y)$ は二つの論理上の主語をもつ表現と考えることができる。すると、この考え方をさらに進

め、「5 は 3 と 4 の間にある」という文は $G(x, y, z)$ と三つの論理上の主語をもつ形で表現できることになる。さらに一般化すれば、$H(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ といった表現が得られる。ここには論理的な主語が n 個登場している。

では、このような論理的な主語を使って、どのように通常の文を書き直したらよいのか。まず、簡単な 4 つの基本型について考えてみよう。すると、肯定形については次のような書き換えができるだろう。

すべての M は S である	すべての x について、その x が M なら、その x は S である
ある M は S である	ある x が存在し、その x は M であり、かつその x は S である

否定形は上のそれぞれの書き換えを否定するだけである。「すべて」や「ある」は主語がどのくらいあるかを表わしている。この二種類の量的な修飾をそれぞれ∀、∃という記号で表し、接続詞も結合子で表現すると、肯定形は、

$\forall x(M(x) \to S(x))$、$\exists x(M(x) \wedge S(x))$

と記号化できる。否定形の場合も同様に記号化すると、

$\forall x(M(x) \to \neg S(x))$、$\exists x(M(x) \wedge \neg S(x))$

となる。では、複数の論理的な主語をもつ文はどのようになるか。以前の文「人間の細胞は動物の細胞である」を例に考えてみよう。論理上の主語が一つの場合は一回の書き換え、二つの場合は二回の書き換えが必要となる。これはまず「すべての x について、その x が人間の細胞であれば、その x は動物の細胞である」と書き換えられる。さらに、「その x が人間の細胞である」は「その x は、ある人間 y がいて、その y の細胞 x である」に、「その x は動物の細胞である」は「その x は、ある動物 y がいて、その y の細胞 x である」に書き換えられる。ここで、$F(x)$: x は人間である、$G(x)$: x は動物である、$H(x, y)$: x は y の細胞である、とすると、

$\forall x(\exists y(F(y) \wedge H(y, x)) \to \exists y(G(y) \wedge H(y, x)))$

と書き換えられる。書き換えられた記号の式は論理式と呼ばれるが、自然言語の平叙文（「…は—である」の形の文）はこのようにして論理式に記号化できることになる。

すると、推論はそこに登場する文を記号化し、論理式をつくり、それについての計算を演繹システムで実行し、結論をもとの文に翻訳すればよいという手順が自然に出てくる。つまり、ライプニッツやブールの考えが論理式についての計算のシステムという形で実行できることになる。これを成し遂げたのがフレーゲである。

(問) 次の文を論理式に記号化してみよう。
直線 l に平行な線がある。

直線 l に平行な線が少なくとも一本ある。
直線 l に平行な線は高々一本である。

フレーゲの仕事はBox 4を見ていただくことにして、より具体的に推論がどのように形式化され、例を使って代数的な演算として解けるかどうかを見ていくことにしよう。それは大きく二つの段階からなる。一つは命題の記号化であり、他は演繹系列の構成である。この二つはライプニッツが発想し、ブール、フレーゲによって具体化されたものである。

Box* 4

フレーゲはドイツの数学者、論理学者、そして哲学者である。彼は述語論理の計算システムをつくり、証明の概念を形式化した。また、言語を包括的に研究し、現在も多くの哲学者がその研究を続行している。彼は数学を論理に還元することに生涯取り組んだが、それには成功しなかった。

（論理学）

ライプニッツの思考の言語と理性的な計算という考えを具体化するためにフレーゲは命題を形式的に表現し、それを証明する述語論理のシステムを生み出した。それは第一階の述語計算と呼ばれることになるが、数学的な推論を遂行するのに十分なものだった。これはアリストテレスの文を主語－述語で分析することの限界を打ち破ったもので、「証明」は公理または定理から推論規則によって導出された論理式の系列として厳密に形式化された。

フレーゲは述語計算のシステムをもとに数学の基礎づけを試みた。彼は論理主義と呼ばれる、論理的な概念だけで数学的概念を定義し、論理法則だけから数学的公理を導き出すという考えのもとに、それを *Grundgesetze der Arithmetik* で実行した。その中で使われた抽象の公理は後にラッセルのパラドクス（Box 5 を参照）をもたらす。論理主義は成功しなかったが、そこでの成果はラッセルとホワイトヘッドの *Principia Mathematica* につながって行く。

フレーゲは数学や論理の研究と並んで、言語についての考察も行った。彼の論文 ‘Über Sinn und Bedeutung’ は今ではこの分野の古典である。彼は言語についての二つの謎を考える。一つは同一性言明で、他は命題的態度のような文である。両方に共通するのは、語は意味と指示の両方をもち、両方が文の有意味性や論理的な振舞いに不可欠な点である。この考えはその後現在に至るまで大きな影響を与えることになる。そこで、この点を詳しく見てみよう。

(同一性言明)

次の同一性言明を例に考えてみよう。

$117 + 136 = 253.$
明けの明星は宵の明星と同一である。
ビートたけしは北野武である。
与作は史門の父親である。

フレーゲによれば、これらはみな $a = b$ の形をしている。彼は $a = b$ の形の文が真になるのは、a が指示する対象と b が指示する対象が同じ場合であると想定した。明けの明星と宵の明星は同じ金星を指示しているから、上の例文は真になると考えた。しかし、この説明では「$a = b$」 と「$a =$

a」 の真理条件は区別がつかない。例えば、「ビートたけし＝北野武」と「ビートたけし＝ビートたけし」の区別がつかなくなる。なぜこの区別が必要なのか。一方はトートロジーなのに、他方は情報をもっており、二つの文の認識的な意味が異なっているからである。

(命題的態度)

人と命題の間の心理的関係は信念、欲求、意図、知識等がある。これらは次のような文で表現されている。

A は p を信じる。
A は p を欲する。
A は p を意図する。
A は p を知る。

A に「伊作」、p に「ビートたけしはコメディアンである」を代入すると、最初の文について、

伊作はビートたけしがコメディアンであると信じる

という文ができる。ここで同一性言明「ビートたけし＝北野武」を使って、代入によって、

伊作は北野武がコメディアンであると信じる

という文をつくってみよう。「ビートたけし＝北野武」から代入によってつくられた文の真理値は代入前の文の真理値と同じ筈である。この推論は伊作が北野武を知らなければ、正しくないが、次のような正しい推論に似ている。

4 は 3 より大きい。
4 は 8 の半分である。
よって、8 の半分は 3 より大きい。

この推論で使われる代入の原理は命題的態度が入った文では成立しない。伊作がビートたけしの本名を知らなければ、代入してつくられた文は彼には正しくないかもしれないからである。

［意味と指示］

これらの謎を説明するためにフレーゲが考えたのは意味と指示の区別である。「明けの明星」と「宵の明星」は金星を指示するが、金星を違った仕方で指示する。この違った指示の仕方が意味の違いである。「神武天皇」と「日本の初代天皇」は意味をもっているが、指示があるかどうかは疑わしい。言明全体の意味はその構成要素の意味の関数である。a の意味と b の意味が異なるので、「$a = a$」と「$a = b$」の構成要素は異なり、したがって、「$a = a$」と「$a = b$」の意味は異なるのである。意味が異なることから認識的にも異なることになり、「＝」に関する謎は説明できることになる。

さらに、命題的態度を表す動詞の後に登場する p は、p だけの場合に指示するものを指示しなく

なる、とフレーゲは主張した。つまり、それら動詞の後では指示対象が異なるのである。これによって、代入の原理が成立しなくなる。したがって、伊作の推論は正しくないのである。

Box 5

哲学には昔からパラドクスがしばしば登場する。次の二つのパラドクスはいずれも言語と論理に深く結びついたパラドクスで、言語と論理の研究を大きく前進させるきっかけを与えた。

1 嘘つきのパラドクス

どのような文も同時に真、偽の両方であることはない、と仮定しよう。これは自然な仮定である。

(1) 文(1)は偽である。

(1) は三つの解釈ができる。(1) は真である、(1) は偽である、あるいは、(1) は真でも偽でもない、の三つである。さて、(1) が真であると仮定してみる。すると、(1) は (1) が偽であると言っているのであるから、それが言っていることは偽である。だから、(1) が真なら、それは偽でもあることになり、仮定に反することになる。(1)が偽であると仮定してみよう。(1) が偽なら、それが言っていることは真になるから、やはり仮定に反する。最後に、(1)が真でも偽でもないとしてみる。すると、(1) はそれが偽であり、かつ真でも偽でもないことになり、それが自らについて言っていることは偽となる。よって、(1) が真でも偽でもないなら、偽になり、やはり矛盾する。

2 ラッセルのパラドクス

A = {x| x は自分自身に含まれない}としてみよう。この時、A は A 自身に含まれるか、それとも含まれないか。この問題はどのように答えられるだろうか。A が A に含まれると仮定してみよう。すると、

$A \in A$

$\Leftrightarrow A \in$ {x| x は自分自身に含まれない}

$\Leftrightarrow A \in \{x \mid x \notin x\}$

$\Leftrightarrow A \notin A$

となり、A は A 自身に含まれないことになる。では、A が A に含まれない場合はどうか。同じように、

$A \notin$ {x| x は自分自身に含まれない}

$\Leftrightarrow A \in A$

となり、A は A 自身に含まれることになる。

こうして、いずれの場合であっても矛盾することになる。